



TITLE:

定常状態の安定性に対する  
Liapounoff関数の問題(非線型非平  
衡統計力学研究会報告,基研研究会  
報告)

AUTHOR(S):

堀, 淳一

---

CITATION:

堀, 淳一. 定常状態の安定性に対するLiapounoff関数の問題(非線型非平衡統計力学研究会報告,基研研究会報告). 物性研究 1975, 24(2): B24-B26

ISSUE DATE:

1975-05-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/89007>

RIGHT:

柴田文明, 高橋慶紀

function を統一的に扱うことができる。<sup>5)</sup>

## 参 考 文 景

- 1) G. S. Agarwal and E. Wolf : Phys. Rev. D2, (1970) 2161
- 2) F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, and H. Thomas : Phys. Rev. A6, (1972) 2211  
Y. Takahashi and F. Shibata : J. Phys. Soc. Japan 38, (1975) No. 3
- 3) R. Kubo and N. Hashitsume : Progr. Theor. Phys. Suppl. No. 46 (1970) 210
- 4) F. Haake : Springer Tracts in Modern Physics 66, (1973) 98
- 5) Y. Takahashi and F. Shibata : to be published

## 定常状態の安定性に対する Liapounoff 関数の問題

堀 淳 一

非平衡定常状態の安定性に対する criterion としては, Prigogine-Glansdorff によって導入された generalized excess entropy production (GEEP) がよく用いられる。これは generalized excess entropy (GEE) の時間変化として, 物理的に構成することができるという利点を持つ。いいかえれば, GEEP を criterion として用いることは, 物理的に明瞭な意味を持つ GEE という量を Liapounoff 関数として用いることにほかない。しかし反面 GEEP は, 安定性に対する十分条件をしか与えないという欠点を持つ。さらに GEEP はやはり Prigogine-Glansdorff によって導入された general evolution criterion (GEC) に対するポテンシャルの役割を演じることが期待される量である。すなわち GEEP の時間微分が GEC に等しくなれば, GEEP は GEE と GEC の双方に対する simultaneous な criterion となって具合がよい。しかしながら, 実際は一般には GEC は GEEP の時間微分に等しくはなく,  $GEE \rightarrow GEEP \rightarrow GEC$  という判定関数の連鎖には, あとの段階でギャップがある。

この論文では, 定常状態からのゆらぎ  $X$  の regressivon に対する線形化された方程式

$\dot{X} = A X$  にもとずいて、

(1) 安定性に対して必要十分な条件を与える criterion およびその Liapounoff 関数を作るにはどうすればよいか。

(2) 必要十分な条件を与える Liapounoff 関数、 criterion および後者の時間微分は、上記のような 3 つの関数の連鎖を作るか。

(3) これら 3 つの関数と、上記の 3 つの関数 GEE, GEPP および GEC との間にはどれ位の距離があるか。たとえば後者の 3 つの何れかに適当な重みの関数をかけることによって、必要十分な条件を与える 3 つの関数を導くことができるか。

という問題を議論し、以下のような結論を得た：

(1)  $A$  の右固有ベクトルの組を基底にとる。任意のタテベクトル  $X$  に対して、 $X$  の反変成分  $x_i$  と同じ共変成分をもつヨコベクトル  $Y$  を導入すると、形式  $\Phi = Y A X = (\frac{1}{2}) (d\psi/dt)$  が正定形関数  $\Phi = \sum_i x_i^2$  を Liapounoff 関数とする必要十分な criterion を与える。 $A$  の左固有ベクトルから作られる行列を  $B$  として、行列  $G = B^T B$  を作ると、 $\Phi$  は  $\Phi = X^T G A X$  と書ける。 $G$  を計量行列とする 2 次形式で内積を定義すると、この内積に関して  $A$  は対称演算子になる。

(2)  $\Phi$  の時間微分は  $2 \dot{X}^T G \dot{X}$  に等しくなって、正定形な 2 次形式を与える。したがって  $\Phi$ ,  $\Phi$  および  $\dot{\Phi}$  は前述の意味での関数の連鎖を作る。

(3) 簡単なレーザーのモデルでは、GEPP の各項に重みの関数をかけることによって  $\Phi$  を作ることはできない。しかし Bénard の問題においては、GEC の各項に簡単な重みの関数をかけることと、 $A$  を対称化する計量行列  $G$  を求めることは同等である。いいかえれば、この場合には、GEC に適当な重みを導入することによって、安定性に対する必要十分な判定条件を与える 3 つの関数の連鎖を作ることができる。

以上を要するに、問題は  $A$  を対称化するような計量行列  $G$  を求めることに帰属するのである。 $A$  の固有値問題が解ければもちろん  $G$  は求まるが、固有値問題を解かなくても視察によって  $G$  が求まる場合があることを Bénard の問題の例は教えている。視察によって  $G$  を求めることが困難な場合にも、上の結果は、GEE, GEPP, GEC という関数の組が、 $\psi$ ,  $\Phi$ ,  $\dot{\Phi}$  という関数の組との間にどの程度の逕庭があるかについて、すなわちいわば必要十分な criterion という立場から見た前者の位置づけについて、定性的な洞察を得るのに役立つであろう。

堀 淳一

なお詳細はすでにプロGRESSに一部発表され，一部印刷中である：

### 参 考 文 献

Phase Transition between Stationary States I — A Simple Model of Laser-Like Behaviour, J. Hori, Y. Y. Okamoto, M. Ono and Y. Sawaya, Prog. Theor. Phys. **52** (1974) 1146.

Phase Transition between Stationary States II — Liapounoff Function in Bénard Problem, I. Shimada and J. Hori, Prog. Theor. Phys., in press.

## 散 逸 構 造 と 一 般 化 T D G L 方 程 式

九大・理 蔵 本 由 紀

散逸的な2成分ダイナミカルシステム

$$(\partial_t - \hat{D} \nabla_{\underline{r}}^2) \underline{X} = \underline{F}(\underline{X}) \quad (1)$$

を考える。ここに

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix},$$

また  $\underline{F}$  は一般に  $\underline{X}$  の非線型項を含むとする。このモデルの典型例は拡散過程を含む非線型化学反応系であるが，以下の議論ではこのことは直接関係ない。この系の示す不安定現象のいくつかとその後形成される散逸構造を調べよう。拡散係数  $D_x, D_y$  及び  $\underline{F}$  の  $\underline{X}$  に関する展開係数をひとまとめにしてパラメタの組  $\underline{\lambda}$  であらわすことにする。式(1)はなお一般的過ぎるので次のようなモデルの簡単化を行う。

- (I)  $\underline{\lambda}$  は実数パラメタ，そして  $\underline{r}$ ， $t$  に無関係，更に  $D_x, D_y > 0$ 。
- (II) 体系は境界効果を無視できるほど十分大きい。